Unidad 2

Introducción a las relaciones proporcionales

¿Alguna vez te has preguntado cuál es el auto que viaja más rápido, qué receta contiene más azúcar o cuántos globos se necesitarían para hacer flotar un objeto? En lecciones anteriores, hiciste comparaciones para determinar la mejor oferta a partir de la tasa unitaria o para crear copias a escala de figuras. En esta unidad, seguirás explorando la proporcionalidad. ¡Y descubrirás lo útil que puede ser a la hora de hacer comparaciones sobre situaciones cotidianas!

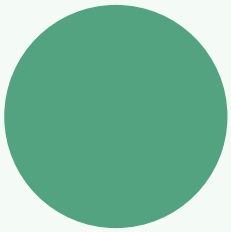
Preguntas esenciales

- ¿Qué significa que dos cosas estén proporcionalmente relacionadas? ¿Cómo puedes saber si lo están?
- ¿De qué maneras puedes representar relaciones proporcionales? ¿Cómo se relacionan estas representaciones?

© Amplify Education, Inc and its licensors. Amplify Desmos Math se desarrolló a partir del plan de estudio de Illustrative Mathematics (IM).

Resumen | Lección 1

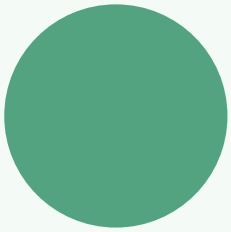
Se dice que dos razones son *razones equivalentes* cuando se pueden multiplicar los números de una razón por el mismo factor para obtener los números de la otra razón.



2 vasitos de pintura blanca

3 vasitos de pintura verde

Por ejemplo, 2 vasitos de pintura blanca mezclados con 3 vasitos de pintura verde crean el mismo color que 6 vasitos de pintura blanca mezclados con 9 vasitos de pintura verde. Puedes multiplicar el número de vasitos de pintura blanca y vasitos de pintura verde de la primera razón por 3 para obtener la segunda razón.



6 vasitos de pintura blanca

9 vasitos de pintura verde

Para determinar si dos razones son equivalentes, puede ser útil valerse de una tabla de razones como esta:

Pintura blanca (vasitos)	Pintura verde (vasitos)
2	3
6	9

×3 ×3

Prueba a hacer esto

Esta es una receta para hacer refresco de piña:

Por cada 5 tazas de agua con gas, mezclar 2 tazas de jugo de piña.

Completa la tabla para mostrar tres combinaciones posibles de agua con gas y jugo de piña que producirán refresco de piña.

Agua con gas (tazas)	Jugo de piña (tazas)

Resumen | Lección 2

Una **relación proporcional** es un conjunto de *razones equivalentes*. Cada uno de los valores de una cantidad se multiplica por el mismo número para obtener los valores de la otra cantidad.

Puedes verificarlo pasando de una columna a otra en esta tabla que muestra el costo de cantidades variables de soja. Puedes multiplicar las libras de soja por 2 para obtener el costo.

Cuando se multiplica una cantidad en una relación proporcional por un valor, la otra cantidad cambiará por el mismo factor.

Puedes verificarlo pasando de una fila a otra en la tabla. Cuando las libras de soja se multiplican por 8, el costo se multiplica por el mismo número.

Soja (lb)	Costo ($)
1	2
2	4
8	16
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	0.50

$\times 2$ $\times 2$ $\times 8$ $\times 8$

Prueba a hacer esto

Completa las tablas de forma tal que una muestre una relación proporcional y la otra no.

Es una relación proporcional

x	y
2	8
6	
	4

No es una relación proporcional

x	y
2	8
6	
	4

En una *relación proporcional*, puedes multiplicar los valores de una cantidad por una **constante de proporcionalidad** para obtener el valor de la otra cantidad.

Por ejemplo, 12 es una constante de proporcionalidad en la relación entre pies y pulgadas.

Pies	1	2	6
Pulgadas	12	24	72

Eso significa que puedes multiplicar el número de pies por 12 para determinar el número de pulgadas.

Prueba a hacer esto

Esta es una receta para hacer refresco de piña:

Por cada 5 tazas de agua con gas, mezclar 2 tazas de jugo de piña.

¿Cuál es una constante de proporcionalidad para esta situación?

Agua con gas (tazas)	Jugo de piña (tazas)
5	2
10	4
20	8

Resumen | Lección 4

Las *relaciones proporcionales* se pueden representar con la ecuación $y = kx$, donde k es la *constante de proporcionalidad*.

Por ejemplo, la tabla muestra la relación proporcional entre la cantidad de libras de soya y el costo en una determinada tienda.

- El costo de la soya es proporcional al peso con una constante de proporcionalidad de 2.
- Si c representa el costo y w representa el peso, entonces se puede representar la relación proporcional con la ecuación $c = 2w$.

Peso (lb), w	Costo ($), c
$\frac{1}{2}$	1.00
1	2.00
2	4.00
w	$2w$

Prueba a hacer esto

Esta es una receta para hacer refresco de piña:

Por cada 5 tazas de agua con gas, mezclar 2 tazas de jugo de piña.

Escribe una ecuación que represente la relación de la receta. Usa s para las tazas de agua con gas y p para las tazas de jugo de piña.

Agua con gas (tazas), s	Jugo de piña (tazas), p
5	2
10	4
20	8

Cuando un vehículo circula a una velocidad constante, hay una *relación proporcional* entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida. Esto es válido para cualquier persona, animal u objeto que se desplace a una velocidad constante.

Por ejemplo, imagina que alguien corre a 5 metros por segundo. La tabla muestra la distancia que recorre en distintos intervalos de tiempo. La tabla también muestra su velocidad, en metros por segundo.

La última fila de la tabla muestra que podemos multiplicar el tiempo, t, por la *constante de proporcionalidad*, 5, para determinar la distancia recorrida, d.

La ecuación $d = 5t$ representa esta relación.

Tiempo (s)	Distancia recorrida (m)	Velocidad (m por s)
1	5	5
2	10	5
3	15	5
7	35	5
t	$5t$	5

Prueba a hacer esto

Una panadería usa la ecuación $f = 1.5h$ para decidir la cantidad de cucharadas de miel, h, que se deben agregar a f tazas de harina para hacer pan.

a ¿Qué significa 1.5 en esta situación?

b ¿Cuántas cucharadas de miel deberán usarse en un molde de pan que lleva 18 tazas de harina?

Resumen | Lección 6

Cuando dos cantidades x y y están en una *relación proporcional*, puedes representar la relación de dos maneras:

- La ecuación $y = kx$, con k como la *constante de proporcionalidad*.
- La ecuación $x = \frac{1}{k}y$, con $\frac{1}{k}$ como la constante de proporcionalidad.

Cada ecuación resalta la relación entre las dos cantidades.

Por ejemplo, si una libra de soja cuesta $\$2.00$, entonces:

- El costo, c, es proporcional al peso, w. La ecuación $c = 2w$ representa la situación porque puedes multiplicar el peso por 2 para obtener el costo.
- El peso, w, es proporcional al costo c. La ecuación $w = \frac{1}{2}c$ representa la situación porque puedes multiplicar el costo por $\frac{1}{2}$ para obtener el peso.

Las dos constantes de proporcionalidad en una relación proporcional son recíprocas.

Los **recíprocos** son dos números cuyo producto es 1. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es el recíproco de 2.

Prueba a hacer esto

Jayden tardó 6 minutos en llenar una bañera con 24 galones de agua de un grifo que fluía a un ritmo constante.

Tiempo (min), t	Agua (gal), w
0	0
2	8
4	16
6	24

a ¿Cuáles son las dos constantes de proporcionalidad de esta situación? ¿Cómo se relacionan?

b Escribe dos ecuaciones que relacionen a w y t en esta situación.

Resumen | Lección 7

La estructura de una ecuación que representa la relación entre dos cantidades puede decirnos si esa relación es proporcional. Una ecuación en la forma $y = kx$ tiene una *constante de proporcionalidad*, k, lo que significa que representa una relación proporcional.

Ecuaciones como $y = 3x + 1$ y $y = x^2$ no tienen una *constante de proporcionalidad*, por lo que *no* representan relaciones proporcionales.

Volver a escribir una ecuación de otra manera puede ayudar a que una relación proporcional sea más fácil de ver. Por ejemplo, tanto $y = \frac{x}{3}$ como $y = \frac{1}{3}x$, representan la misma relación proporcional.

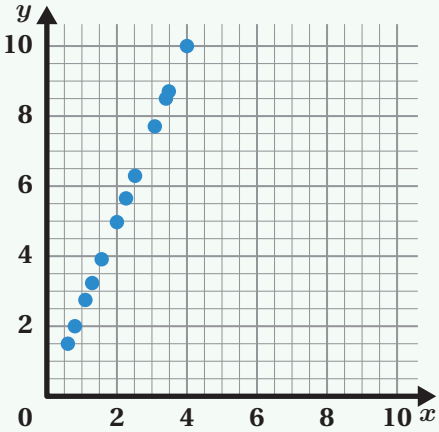
Las tablas pueden ayudarte a determinar si una ecuación se puede reescribir en la forma $y = kx$.

Prueba a hacer esto

Selecciona *todas* las ecuaciones que representen una relación proporcional.

- ☐ **A.** $K = C + 283$
- ☐ **B.** $m = \frac{1}{4}j$
- ☐ **C.** $V = s^3$
- ☐ **D.** $h = \frac{14}{2}$
- ☐ **E.** $c = 6.28r$

En un *plano de coordenadas*, si todos los puntos caen en una recta que pasa por $(0, 0)$, la relación es proporcional. El punto $(0, 0)$ se conoce como el **origen**.



Si no está claro si los puntos forman una recta, puedes probar si las razones de las coordenadas son equivalentes.

Por ejemplo, las coordenadas de dos puntos de esta recta son $(2, 5)$ y $(4, 10)$.

$5 \div 2 = 2.5$ y $10 \div 4 = 2.5$

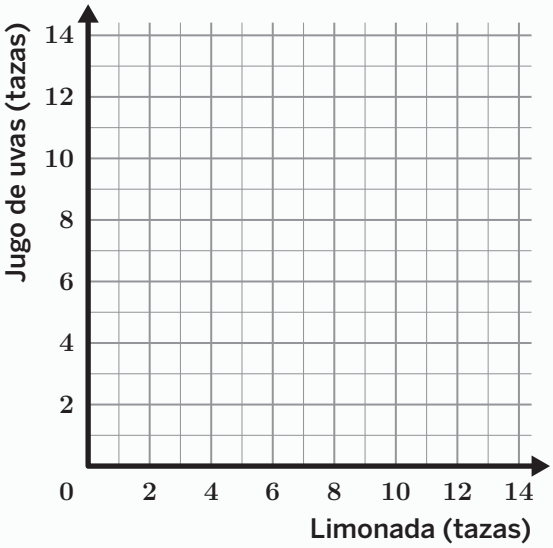
Dado que la razón de las coordenadas en ambos puntos es 2.5, estos puntos forman parte de una relación proporcional.

Prueba a hacer esto

Esta es una receta para hacer refresco de uva:

Por cada 6 tazas de limonada, mezclar 3 tazas de jugo de uvas.

a Haz una gráfica que represente la relación entre las cantidades de limonada y de jugo de uvas para hacer tandas de distintas cantidades de refresco de uva.



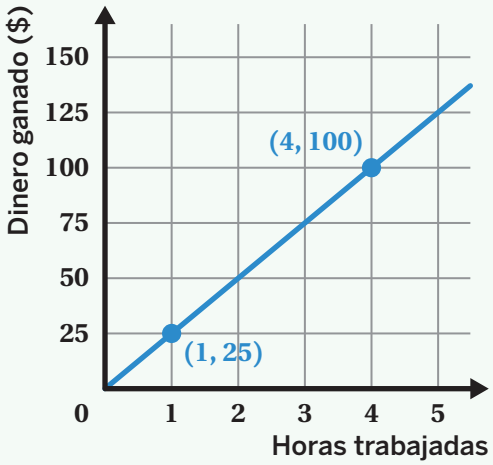
b ¿Es esta una relación proporcional? Explica tu razonamiento.

Cada punto en una gráfica de una relación proporcional cuenta un relato usando las cantidades representadas por x y y. Puedes determinar una constante de proporcionalidad a partir de una gráfica utilizando:

- El valor de y cuando x es igual a 1.
- La razón $\frac{y}{x}$ para cualquier par ordenado.

Por ejemplo, esta gráfica muestra una relación proporcional entre las horas trabajadas, x, y el dinero ganado en dólares, y. Una constante de proporcionalidad es 25, porque se gana $\$25$ por trabajar 1 hora.

El par ordenado $(4, 100)$ muestra que se gana $\$100$ por 4 horas de trabajo, lo que es una razón equivalente a ganar $\$25$ por hora.

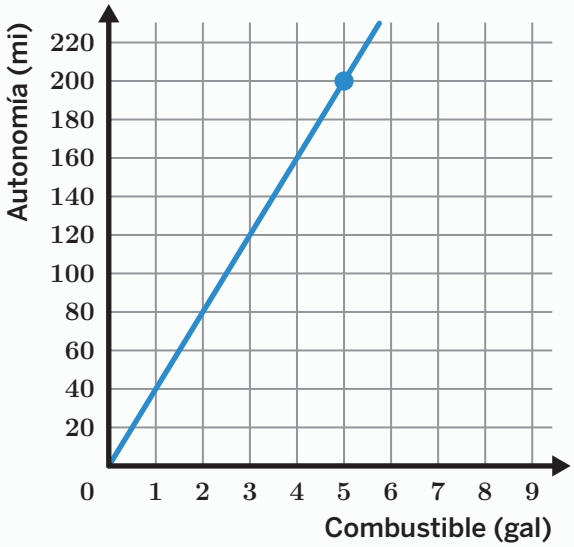


Prueba a hacer esto

La gráfica muestra la distancia que recorre un auto usando cualquier cantidad de combustible.

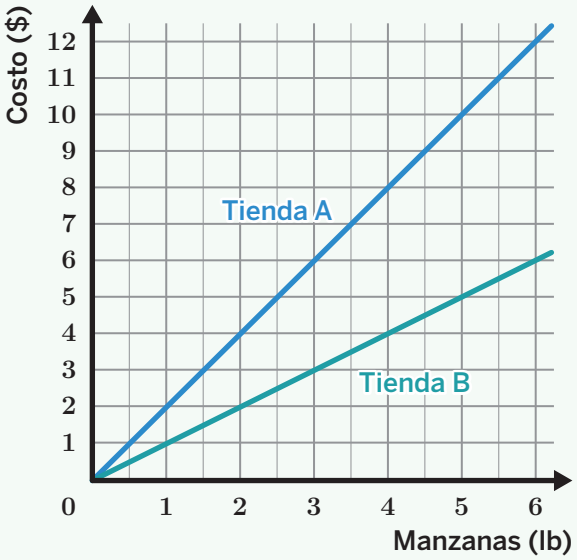
a ¿Cuál es la constante de proporcionalidad para la relación entre los galones de combustible y las millas recorridas?

b ¿Qué significa el punto $(5, 200)$ en esta situación?



Puedes comparar gráficas de relaciones proporcionales cuando están en el mismo plano de coordenadas. Cuanto mayor es la inclinación de la recta, mayor será la constante de proporcionalidad.

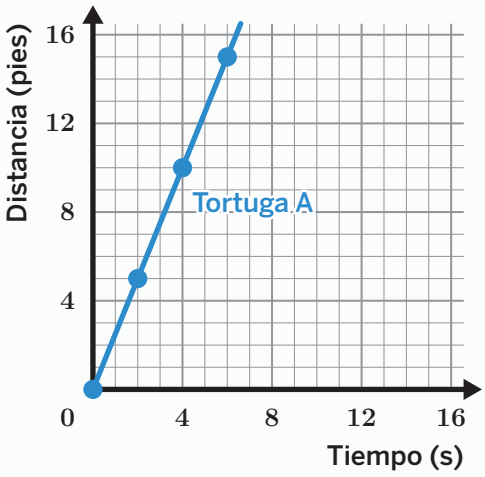
Por ejemplo, puedes usar esta gráfica para comparar el costo de las manzanas en dos tiendas diferentes.



- La recta que representa la tienda A es más empinada que la recta que representa la tienda B, por lo que tiene una constante de proporcionalidad mayor. Esto significa que la tienda A cobra más por libra que la tienda B.
- La tienda A cobra $\$2$ por una libra ($k = 2$), mientras que la tienda B cobra $\$1$ por una libra ($k = 1$). Esta es otra forma de determinar que la constante de proporcionalidad de la tienda A es mayor que la de la tienda B.

Prueba a hacer esto

Dos tortugas salieron a caminar. Cada una de ellas recorrió una distancia, d, después de t segundos.



a La gráfica representa el recorrido de la tortuga A. Escribe una ecuación para representar esta relación.

b La ecuación $d = 2t$ representa el recorrido de la tortuga B. Traza una recta en la gráfica para representar a la tortuga B.

c ¿Cuál de las tortugas caminó más rápido? Explica cómo lo sabes.

Resumen | Lección 11

Puedes determinar la constante de proporcionalidad, k, de diferentes maneras usando diferentes representaciones.

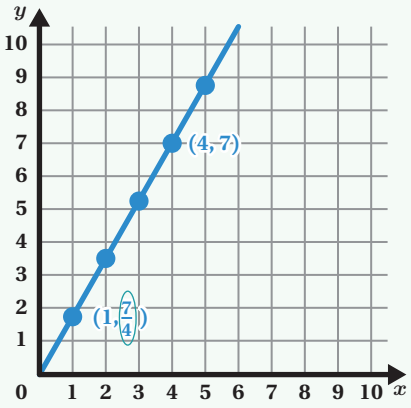
Ecuación

$y = \frac{7}{4}x$

Tabla

x	y
0	0
1	$\frac{7}{4}$
4	7

Gráfica



En una tabla o gráfica, la constante de proporcionalidad es el valor de y que se relaciona con un valor de x de 1. La constante de proporcionalidad es también $k = \frac{y}{x}$, donde (x, y) es cualquier par ordenado.

En una ecuación en la forma $y = kx$, el número que multiplica a x (llamado *coeficiente*) es la constante de proporcionalidad.

Prueba a hacer esto

Una panadería usa 7 cucharadas de chocolate por cada 2 tazas de leche para preparar leche chocolatada.

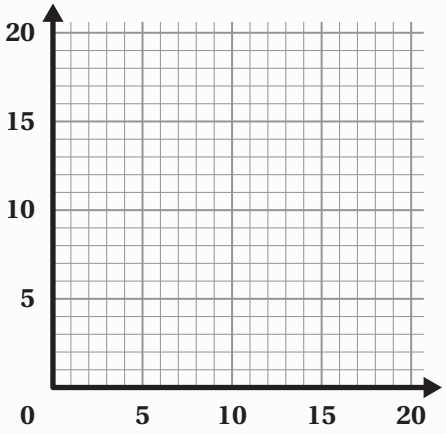
a Desarrolla una tabla, una ecuación y una gráfica para representar esta relación proporcional.

Ecuación

.....

Tabla

Gráfica



b Encierra en un círculo o muestra dónde puedes ver la constante de proporcionalidad en cada representación.

Puedes usar relaciones proporcionales para modelar preguntas de la vida real, como por ejemplo, si se usa más agua al bañarse o al ducharse.

La elección de *cómo* representar el modelo es importante porque afecta el modo en que otros interpretarán la información.

Cuando creas un modelo, puedes convertir un problema sin una respuesta clara en información que alguien puede utilizar. ¡Eso es un trabajo importante!

Prueba a hacer esto

He aquí algunos datos sobre el consumo de combustible de dos autos.

Auto A	Auto B
Tanque de 20 galones	Tanque de 12 galones
24.9 millas por galón	552 millas por tanque

a ¿Cuál auto puede recorrer la mayor distancia con 1 galón de combustible?

b ¿Cuál auto puede recorrer la mayor distancia con un tanque lleno de combustible?

Identificar si una relación es proporcional es un paso importante cuando se trabaja en un problema matemático.

Si la relación es proporcional, existen múltiples formas de representarla.
La representación que elijas puede afectar qué tan bien tu audiencia entienda la relación y la información que deseas comunicar sobre esta.

Pedir a otra persona que revise y critique tu trabajo puede ayudar a fortalecerlo. A veces hay perspectivas que no puedes ver hasta que alguien las comparte contigo.

Prueba a hacer esto

Da un ejemplo de una situación de la vida real que pueda modelarse con una relación proporcional. Explica cómo sabes que la relación es proporcional.

Lección 1

Las respuestas pueden variar.

Agua con gas (tazas)	Jugo de piña (tazas)
10	4
15	6
20	8

Lección 2

Es una relación proporcional

x	y
2	8
6	24
1	4

Las respuestas pueden variar.

No es una relación proporcional

x	y
2	8
6	16
4	4

Lección 3

Tanto $\frac{2}{5}$ como $\frac{5}{2}$ son constantes de proporcionalidad en esta situación. $\frac{2}{5}$ es el número de tazas de jugo de piña por taza de agua con gas. $\frac{5}{2}$ es el número de tazas de tazas de agua con gas por taza de jugo de piña.

Lección 4

Las respuestas pueden variar. Algunas ecuaciones que representan esta situación son $p = 0.4s$, $s = 2.5p$ y $2s = 5p$.

Lección 5

a. *Las respuestas pueden variar.* 1.5 significa que hay 1.5 tazas de harina por cada cucharada de miel en la receta de pan.

b. 12 cucharadas de miel.
Nota para cuidadores: Un método es el de reemplazar 18 por f en la ecuación $f = 1.5h$ para obtener la ecuación $18 = 1.5h$. A partir de allí, se puede calcular $\frac{18}{1.5} = 12$ cucharadas de miel.

Lección 6

a. 4 y $\frac{1}{4}$. Son recíprocos. Si los multiplicas, forman 1.

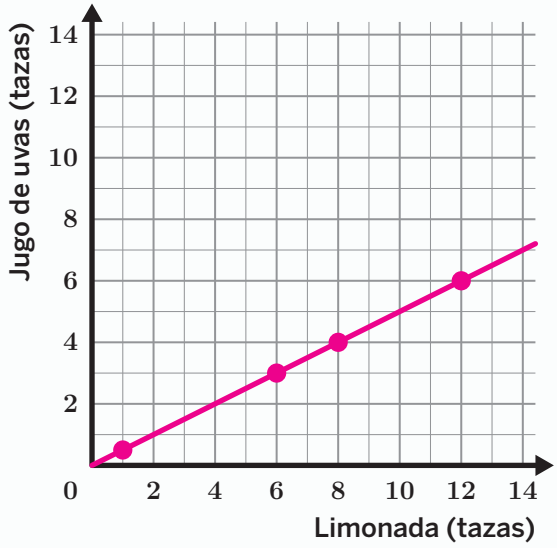
b. $w = 4t$, $t = \frac{1}{4}w$

Lección 7

B. $m = \frac{1}{4}j$, E. $c = 6.28r$

Lección 8

a.



b. Sí, es una relación proporcional. Todos los puntos caen sobre una recta que pasa por el origen, y hay una constante de proporcionalidad de 2 tazas de limonada por 1 taza de jugo de uvas, o de 0.5 de taza de jugo de uvas por 1 taza de limonada.

Lección 9

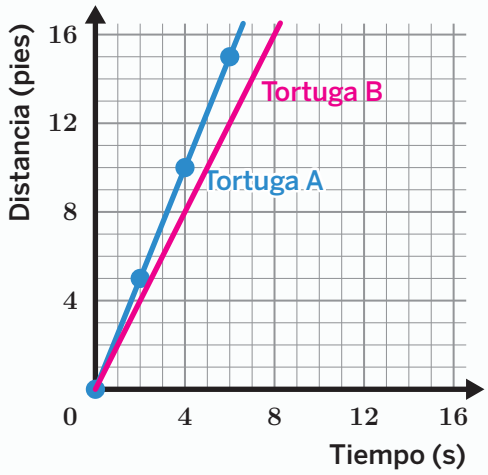
a. 40 millas por galón. El punto $(1, 40)$ representa esta constante de proporcionalidad.

b. *Las respuestas pueden variar.* El punto $(5, 200)$ significa que el auto consume 5 galones de combustible para recorrer 200 millas.

Lección 10

a $d = 2.5t$ (o equivalente).
Nota para cuidadores: Escoge un punto de la gráfica y divide el valor de la coordenada y entre el valor de la coordenada x para hallar la constante de proporcionalidad. Por ejemplo, el punto $(4, 10)$ está en la gráfica, por lo que la constante de proporcionalidad es $\frac{10}{4} = 2.5$.

b



c La tortuga A. La recta tiene una pendiente mayor y la constante de proporcionalidad de la tortuga A es 2.5, que es mayor que la de la tortuga B, 2.

Lección 11

a

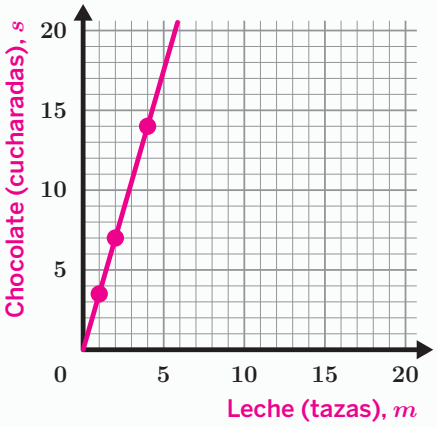
Ecuación

$s = 3.5m$

Tabla

Leche (tazas), m	Chocolate (cucharadas), s
2	7
4	14
1	3.5

Gráfica



b *Las respuestas pueden variar.* En la tabla, la constante de proporcionalidad está representada por las cucharadas de chocolate por cada taza de leche, 3.5. En la ecuación, es 3.5 el valor que se multiplica por m para calcular s. En la gráfica, la constante de proporcionalidad es el valor de la coordenada y del punto $(1, 3.5)$.

Lección 12

a. El auto B puede recorrer una distancia mayor con 1 galón de combustible. El auto A recorre 24.9 millas por galón, mientras que el auto B recorre $\frac{552}{12} = 46$ millas por galón.

b. El auto B puede recorrer la mayor distancia con un tanque lleno de combustible. El auto A puede recorrer $20 \cdot 24.9 = 498$ millas con un tanque de combustible, mientras que el auto B puede recorrer 552 millas con un tanque lleno de combustible.

Lección 13

Las respuestas pueden variar. Las cantidades de cada ingrediente de una receta guardan una relación proporcional. Si se duplica la receta, se duplican todos los ingredientes, y la razón entre dos de cualquiera de sus ingredientes se mantiene igual.